ISSN 1810-0198. Вестник ТГУ, т. 14, вып. 4, 2009

УДК 519.17

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ФАКТОР–МАТРОИДЕ ПРОСТОГО ГРАФА [1]

© С. В. Кольцова

Ключевые слова: матроид; фактор-матроид; база фактор-матроид.

Аннотация: В работе приводится описание баз минимального веса фактор-матроида простых графов. Дан эффективный алгоритм нахождения таких баз.

Матроид [1] M – это пара (E, I), где E – конечное множество, I – семейство его подмножеств, удовлетворяющее следующим условиям:

1) пустое множество входит в I;

2) если $A \subset B$ и B входит в I, то A входит в I;

3) если A и B содержатся в I и количество элементов в A на единицу больше количества элементов в B, то существует элемент $a \in A \backslash B$ такой, что $B \cup \{a\}$ содержится в I.

Подмножества из I называются независимыми. Максимальные (по включению) независимые подмножества называются базами матроида, а минимальные зависимые (не являющиеся независимыми) подмножества называются циклами. Все базы имеют одно и то же количество элементов. Это число называется рангом матроида.

Пример 1: матричный матроид. Пусть A – матрица размеров $n \times m$ над полем F. Определим матроид $M_F(A)$ следующим образом. Множество E состоит из строк матрицы A. Это – совокупность n векторов в F^m. Множество I состоит из линейно независимых совокупностей строк. Ранг матроида совпадает с рангом матрицы.

Пример 2: циклический матроид графа. Элементами матроида являются рёбра графа. Независимыми подмножествами – наборы рёбер лесов (подграфов, не содержащих циклов), базами – рёбра остовных лесов, циклами – рёбра простых циклов графа. Ранг матроида равен $n - k$, где k – число компонент связности графа.

Рассматриваемые далее графы считаем конечными, неориентированными, без петель, кратных рёбер и изолированных вершин. Пусть граф G имеет n вершин.

Пусть A – матрица инцидентности графа G. Рассмотрим матричный матроид $M_F(A)$.

Если F – поле из двух элементов, то матроид $M_F(A)$ изоморфен циклическому матроиду графа G.

Если $F = \mathbb{R}$, то $M_F(A)$ называется фактор-матроидом графа G. Заметим, что для двудольного графа оба матроида совпадают.

В [2] мы дали описание баз фактор-матроидов. Напомним основной результат.

Разобьём графы на 3 класса: (1) не имеющие двудольных компонент связности; (2) имеющие только двудольные компоненты, т. е. двудольные графы; (3) имеющие двудольные и не двудольные компоненты.

Графы класса (3) можно представить как дизъюнктные объединения графов классов (1) и (2).

Т е о р е м а 1. *Базы фактор-матроидов графов класса (1) представляют собой набор рёбер остовных подграфов, являющихся дизъюнктными объединениями унициклических графов с*

[1]Работа поддержана грантами: научной программой "Развитие научного потенциала высшей школы" РНП 2.1.1/1474 и Темпланом 1.5.07.

нечётными циклами. Ранг таких фактор-матроидов равен n. Базы фактор-матроидов графов класса (2) совпадают с базами циклических матроидов графов, т. е. являются остовными лесами. Ранг таких фактор-матроидов равен $n-k$, где k– число компонент. Базы фактор-матроидов графов класса (3) представляют собой объединения баз компонент связности графа, указанных выше. Ранг таких фактор-матроидов равен $n - m$, где m – число двудольных компонент связности.

На базе этой теоремы легко дать описание циклов фактор-матроидов.

Для этого введём понятие бицикла графа. Бицикл – это подграф, являющийся подразбиением одного их графов.

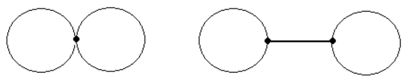

Рис. 1.

Бицикл называется нечетным, если оба его цикла нечетные.

С л е д с т в и е. Циклами фактор-матроида являются простые четные циклы и нечетные бициклы.

Пусть w – вещественная функция на E. Для любого подмножества $X \subset E$ определим его вес формулой:

$$w(X) = \sum_{x \in X} w(x)$$

З а д а ч а. Найти базу наименьшего веса фактор-матроида.

Эту задачу решает следующий алгоритм. На каждом шаге алгоритм выбирает одно ребро e, чтобы выполнялись следующие три условия:

1) Вес ребра e – один из наименьших;

2) Ребро e не совпадает ни с одним из предварительно выбранных ребер;

3) Выбор e не приводит к формированию чётного цикла или нечётного бицикла ни с каким набором предварительно выбранных ребер;

4) Процесс останавливается, если в дальнейшем ребра не могут быть выбраны так, чтобы удовлетворялись ограничения 1), 2) и 3).

Тогда множество выбранных рёбер является множеством рёбер некоторой базы минимального веса.

Обоснование приведённого алгоритма опирается на следующую известную теорему.

Т е о р е м а 2. *Пусть $\mathfrak{I}$ – некоторый набор подмножеств конечного множества E. Тогда $(E, \mathfrak{I})$ является матроидом тогда и только тогда, когда $\mathfrak{I}$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\varnothing \in \mathfrak{I}$,

2) Если $I \in \mathfrak{I}, I' \subset I$, то $I' \in \mathfrak{I}$,

3) Для произвольной весовой функции $w : E \to \mathbb{R}$, жадный алгоритм строит максимальный элемент из $\mathfrak{I}$ максимального веса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Oxley J.G.* Matroid Theory. Oxford University Press, 1992. P. 532.

2. *Koltsova S.V.,Molchanov V.F.* Radon transform of graphs and admissible complexes. // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. Тамбов, 2006. Т. 11. Вып. 1. С. 41–48.

Abstract: The article deals with description of minimal weight bases of the factor-matroid for simple graphs. An effective algorithm for finding such bases is derived.

Keywords: matroid; factor-matroid; base of factor-matroid.

Кольцова Светлана Васильевна
к. ф.-м. н., доцент
Тамбовский государственный университет
им. Г.Р. Державина
Россия, Тамбов
e-mail: molchano@molchano.tstu.ru

Svetlana Koltsova
candidate of phys.-math. sciences,
senior lecturer
Tambov State University named after
G.R. Derzhavin
Russia, Tambov
e-mail: molchano@molchano.tstu.ru

УДК 517.68

COMPUTER ALGEBRA STUDY OF SYMMETRIES IN DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS

© V. V. Kornyak

Keywords: discrete dynamical system; symmetry group; quantization.

Abstract: Symmetries in discrete dynamical systems are investigated due to a computer algebra.

Discrete dynamical systems — deterministic systems, mesoscopic models in statistical mechanics and local quantum models — on lattices are studied by computer algebra and computational group theory methods. Non-trivial connections between symmetries and the system dynamics have been revealed. In particular, we show that formation of moving soliton-like structures — analogs of “spaceships” in cellular automata and “generalized coherent states” in quantum physics — is typical for deterministic dynamical systems with non-trivial symmetry group. We study also gauge invariance in discrete systems and its connection with quantization.

Аннотация: Исследуются симметрии в дискретных динамических системах с помощью средств компьютерной алгебры.

Ключевые слова: дискретные динамические системы; группа симметрий; квантование; компьютерная алгебра.